Brihtnež

Elektronska revija za mlade matematike

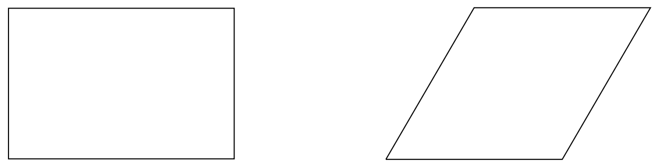
Letnik 0, številka 4

Vsebina

Kot smo zapisali že v prvi številki, se bodo lahko najboljši tekmovalci vključili v eno izmed skupin, ki se bosta udeleževali raziskovalnih dni ter zimskih in letnih šol oziroma priprav na mednarodno matematično olimpiado. Člane prve skupine tokrat vabimo, da nam pošljejo rešitve nalog 3, 4, 12 in 14 iz prispevka *Poliedri* ter nalog 6 in 7 iz prispevka *Kako rešujemo enačbe?*. Člane druge skupine pa vabimo, da nam pošljejo rešitve nalog 3, 4, 5 in 6 iz prispevka *Potenca točke na krožnico*. Rešitve (samo v pisni obliki) morajo prispeti na naslov **DMFA Slovenije, Uredništvo revije Brihtnež, Jadranska 19, 1000 Ljubljana**, najkasneje do 28. 2. 2003. Rešitev, prispelih po tem roku, ne bomo upoštevali, in sicer ne glede na vzrok zamude. Prav tako tudi ne bomo upoštevali rešitev, poslanih po elektronski pošti.

Poliedri

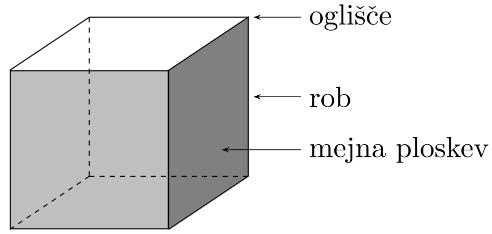
Večkotnik je ravninski lik, ki ga omejujejo daljice. Če so vse daljice, ki omejujejo večkotnik, skladne (enako dolge), in vsi notranji koti večkotnika skladni, govorimo o **pravilnem večkotniku**. Štirikotnika



nista pravilna - prvi nima vseh štirih stranic enako dolgih, pri drugem pa vsi štirje notranji koti niso enaki.

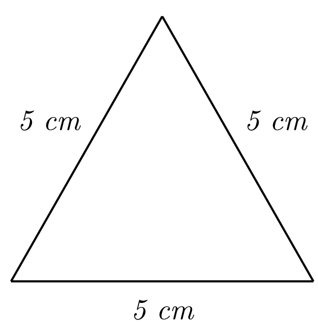
Polieder[1] je geometrijsko telo, omejeno z večkotniki.

Če iz kartona izrežeš šest skladnih kvadratov, jih z lepilnim trakom lahko zlepiš v model kocke, ki je en primer poliedra, včasih tudi imenovanega *heksaeder*.



Vsak kvadrat je **mejna ploskev** kocke. Daljica, ki je presečišče dveh mejnih ploskev, se imenuje **rob**. Točka, v kateri se sekajo tri ali več mejnih ploskev, se imenuje **oglišče**.

Naloga 1. *Iz kartona izreži nekaj skladnih enakostraničnih trikotnikov*



in iz njih sestavi polieder, pri katerem se po trije od teh trikotnikov stikajo v vsakem oglišču. Koliko mejnih ploskev ima?

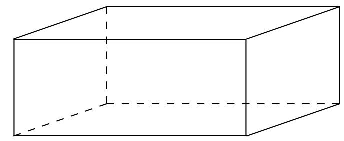
Imenujemo ga *tetraeder*[2] oz. *četverec*.

[1]poli (*gr.*) - več, mnogo
[1]eder (*gr.* hedron) - ploskev
[2]tetra (*gr.*) - štiri

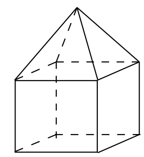
Pravilni poliedri (platonska[3] telesa)

Polieder je **pravilen**, če so njegove mejne ploskve skladni pravilni večkotniki in se v vsakem oglišču stika enako število mejnih ploskev. Že omenjena kocka in tetraeder sta pravilna poliedra.

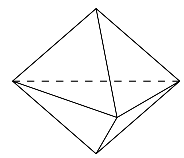
To telo (kvader) ni pravilno, ker niso njegove vse mejne ploskve pravilni večkotniki. (Pravzaprav ni nobena njegova mejna ploskev pravilni večkotnik.)



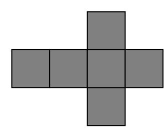
To telo ni pravilno, ker niso vse njegove mejne ploskve skladne.



To telo ni pravilno, ker se v <u>vsakem</u> njegovem oglišču ne stika enako število mejnih ploskev.



Mreža poliedra je ravninski lik, ki ga lahko s pregibanjem in lepljenjem preoblikujemo v polieder. Tole, na primer, je mreža kocke.



V prilogi na koncu revije so mreže vseh petih platonskih teles: **pravilnega tetraedra** (4 ploskve – enakostranični trikotniki, po trije se stikajo v vsakem oglišču), **kocke** (6 ploskev – kvadrati, po trije se stikajo v vsakem oglišču), **pravilnega oktaedra** (8 ploskev – enakostranični trikotniki, po štirje se stikajo v vsakem oglišču), **pravilnega dodekaedra** (12 ploskev – pravilni petkotniki, po trije se stikajo v vsakem oglišču) in **pravilnega ikozaedra** (20 ploskev – enakostranični trikotniki, po pet se jih stika v vsakem oglišču).

Naloga 2. *Sestavi ta telesa z upoštevanjem navodil:*

- *Natisni mreže na debelejši papir (npr. 120 gr./m^2)*
- *Izreži mrežo.*
- *Previdno prepogni po črtkanih črtah.*
- *Zavihke skrij v notranjost in zlepi.*

Naloga 3. *Odgovori na naslednja vprašanja:*

- *Razloži, zakaj ne moreš sestaviti telesa, pri katerem bi se v vsakem oglišču stikali le dve ploskvi.*

[3] Platon (427-347 pr.n.št.) je bil grški znanstvenik, filozof, matematik, ki je približno leta 380 pr.n.št. raziskoval ta telesa.

- *Zakaj ne obstaja telo, pri katerem bi se v vsakem oglišču stikalo šest enakostraničnih trikotnikov?*
- *Zakaj ne obstaja telo, pri katerem bi se v vsakem oglišču stikali štirje kvadrati?*
- *Zakaj ne obstaja telo, pri katerem bi se v vsakem oglišču stikali štirje pravilni petkotniki?*
- *Zakaj ne obstaja telo, pri katerem bi se v vsakem oglišču stikali trije pravilni šestkotniki?*

Naloga 4. *Izpolni tebelo. Za pomoč uporabi izdelane modele teles.*

Ime telesa	*kocka*				
Oblika mejne ploskve	*kvadrat*	*enakostranični trikotnik*	*enakostranični trikotnik*	*enakostranični trikotnik*	*pravilni petkotnik*
Število mejnih ploskev (p)	6		8	20	
Število robov (r)	12				
Število oglišč (o)	8				
Število $o+p$	14				
Število robov na vsaki ploskvi krat število ploskev deljeno z 2	$\frac{4\cdot 6}{2}=12$				
Število $o+p-r$	$8+6-12=$ $=2$				

Opaziš kakšno zakonitost?

- Število v predzadnji vrsti je vedno enako številu robov telesa. To velja tudi za ostale poliedre.

  Rob poliedra nastane kot presek stranic sosednih mejnih ploskev. Zato je število robov poliedra enako polovični vsoti števila stranic vseh mejnih ploskev. Na primer: Telo omejujeta dva šestkotnika in dvanajst trikotnikov. Skupno število stranic mejnih ploskev je $2\cdot 6+12\cdot 3=48$. Torej je število robov telesa enako $48:2=24$.

- Število v zadnji vrsti tabele je pri vseh telesih enako 2.

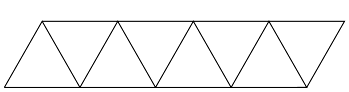
  Matematik *Leonhard Euler (1707-1783)* je dokazal, da za vse poliedre velja

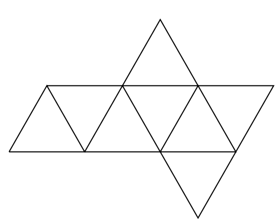
$$o-r+p=2.$$

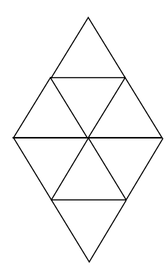
  Po njem se ta enakost imenuje Eulerjeva formula.

  Ugotovitve iz Naloge 3 kažejo, da obstaja le pet pravilnih poliedrov.

Naloga 5. *Kateri lik predstavlja mrežo oktaedra?*

a) 

b) 

c) 

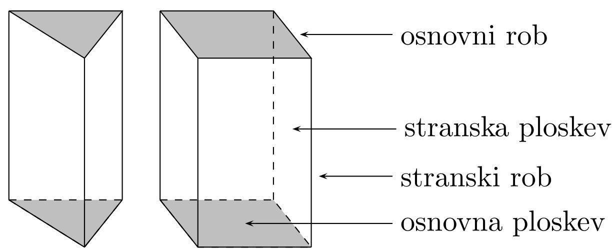
Naloga 6. *Polieder ima 24 robov in 14 mejnih ploskev. Koliko ima oglišč?*

Naloga 7. *Polieder omejuje šest kvadratov in osem pravilnih šestkotnikov. Koliko ima robov in koliko oglišč?*

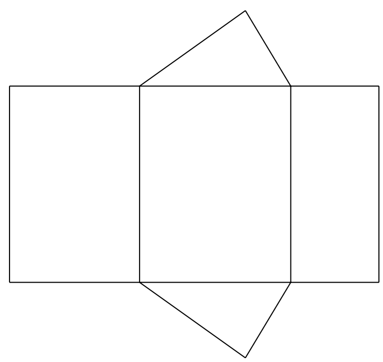
Naloga 8. *Razloži, zakaj ni mogoč polieder, ki bi ga omejevali štirje kvadrati in trije enakostranični trikotniki.*

Prizme

Prizma je polieder, ki ga omejujejo dva skladna vzporedna večkotnika (osnovni ploskvi) in toliko štirikotnikov kot ima osnovna ploskev stranic. Imenujemo jo po številu stranic osnovne ploskve. Na sliki sta primera tri- in štiristrane prizme:



Na naslednji sliki pa je mreža tristrane prizme:



Če je osnovna ploskev pravilni večkotnik, je prizma **pravilna**. Če so stranski robovi pravokotni na osnovno ploskev, je prizma **pokončna**. Če so vsi robovi prizme skladni, je prizma **enakorobna**.

Naloga 9.

a) *Koliko ploskev ima petstrana prizma?*

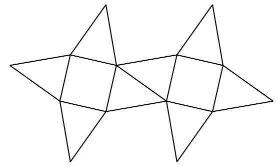
b) *Koliko ploskev ima n-strana prizma?*

Naloga 10. *Koliko ploskev, koliko robov in koliko oglišč ima šeststrana prizma? Preveri, če zanjo velja Eulerjevo pravilo.*

Antiprizme

Naloga 11. *Izreži naslednjo mrežo in jo zlepi v telo.*[4]

[4]V prilogi na koncu revije je na voljo povečana mreža tega telesa.



Nastalo telo se imenuje **kvadratna antiprizma** in omejujeta dva skladna kvadrata ter osem trikotnikov. Središče enega kvadrata leži pravokotno nad središčem drugega, toda oglišča enega niso pravokotno nad oglišči drugega.

Naloga 12.

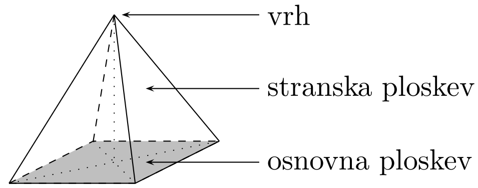
a) *Koliko ploskev ima petstrana antiprizma?*

b) *Koliko ploskev ima n-strana antiprizma?*

Naloga 13. *Koliko ploskev, koliko robov in koliko oglišč ima šeststrana antiprizma? Preveri, če zanjo velja Eulerjevo pravilo.*

Piramide

Piramida je polieder, ki ga omejujejo večkotnik (osnovna ploskev) in toliko trikotnikov kot ima osnovna ploskev stranic. Imenujemo jo po številu stranic osnovne ploskve. Na sliki je primer štiristrane piramide:

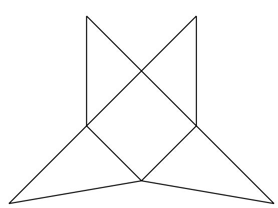


Če je osnovna ploskev pravilni večkotnik, je piramida **pravilna**. Če vrh piramide leži pravokotno nad središčem osnovne ploskve, je piramida **pokončna**. Če so vsi robovi piramide skladni, je piramida **enakorobna**.

Naloga 14. *Ali je mogoča pravilna enakorobna šeststrana piramida? Utemelji odgovor.*

Naloga 15. *Kako drugače imenujemo pravilno enakorobno tristrano piramido?*

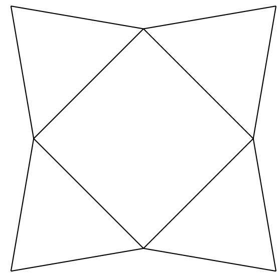
Naloga 16. *Izdelaj tri enake štiristrane piramide:*



Iz njih sestavi kocko.[5] *Kolikšen del prostornine kocke predstavlja prostornina piramide?*

Naloga 17. *Izdelaj šest enakih štiristranih piramid:*

[5] V prilogi na koncu revije je na voljo povečana mreža tega telesa.



Iz njih sestavi kocko.[6]

Literatura in dodatne informacije

B. Henry, *Newton Student Notes*, AMT Publishing, Canberra, Australia, 2002.

http://torina.fe.uni-lj.si/~tomo/labirint/labirint.html

http://www.korthalsaltes.com/index.html

http://home.teleport.com/~tpgettys/poly.shtml

http://www.scg.uwaterloo.ca/~hqle/Polyhedra/polyhedra_main.html

[6] V prilogi na koncu revije je na voljo povečana mreža tega telesa.

Kako rešujemo enačbe?

V osnovni šoli se že spopademo z nekaterimi preprostimi enačbami. Ob tem se srečamo s pojmi *enakost*, *rešitev*, *ekvivalentna enačba* ...

V enačbi nastopata običajno dva izraza, v katerih nastopa neznanka x, na primer $f(x)$ in $g(x)$. Povežemo ju z enačajem in se vprašamo, kakšno vrednost ali kakšne vrednosti ima neznanka x, da je enačba

$$f(x) = g(x)$$

v resnici izpolnjena. Vsaki taki vrednosti neznanke x, za katero je enačba izpolnjena, pravimo **rešitev enačbe** (včasih srečamo tudi ime *koren enačbe*).

Zgled 1. *Reši enačbo* $x + 2 = 2x$.

Rešitev. Poiskati moramo tako vrednost neznanke x, da bo leva stran enačbe enaka desni. Enačbo lahko primerjamo s tehtnico, ki mora biti v ravnovesju. Če imamo na eni strani tehtnice "utež" x in "utež" 2, na drugi strani pa dve enaki "uteži" x, potem je tehtnica v ravnovesju le, če je "utež" x enaka "uteži" 2.
Vrednost $x = 2$ je rešitev enačbe.

Če se še nekoliko ozremo na zgled 1, ugotovimo, da nobena druga vrednost ni rešitev enačbe. Če je $x = 2$, imamo namreč $2 + 2 = 2 \cdot 2$, kar je res, če pa je na primer $x = 3$ ali $x = \frac{1}{2}$, imamo $3 + 2 = 2 \cdot 3$ oziroma $\frac{1}{2} + 2 = 2 \cdot \frac{1}{2}$, kar ni res.

Kako sploh pridemo do rešitve enačbe? V resnici moramo le nekoliko logično sklepati in imeti v mislih tehtnico, ki mora biti vedno v ravnovesju. Prav nam pridejo zlasti trije napotki:

1. **Obema stranema enačbe lahko prištejemo ali odštejemo isto število (oziroma isti matematični izraz).**
   Če imamo tehtnico v ravnovesju in na vsako stran tehtnice dodamo po eno enako utež, bo tehtnica še vedno v ravnovesju (podobno velja, če na vsaki strani odvzamemo po eno enako utež).

2. **Obe strani enačbe lahko pomnožimo s poljubnim od nič različnim številom.**
   Če imamo tehtnico v ravnovesju, bo le-ta še zmeraj v ravnovesju, če bomo dali na vsako stran na primer dvakrat, trikrat ali sedemkrat več, kot je na tej strani.

3. **Obe strani enačbe lahko delimo s poljubnim od nič različnim številom.**
   Če imamo tehtnico v ravnovesju, bo le-ta še zmeraj v ravnovesju, če bomo dali na vsako stran na primer dvakrat, trikrat ali sedemkrat manj, kot je na tej strani.

Prvi napotek velikokrat povemo drugače: *če neko število ali neki matematični izraz prenesemo z ene strani enačbe na drugo, mu moramo pri tem spremeniti predznak.* Pa si oglejmo kar zgled 1 še enkrat. Na obeh straneh odštejmo x:

$$x + 2 - x = 2x - x\,.$$

Na levi strani enačbe ostane le število 2, zato se zdi, da smo v zapisu

$$2 = 2x - x$$

v primerjavi z $x + 2 = 2x$ prenesli x z leve na desno stran in mu pri tem spremenili predznak. Od tod je le korak do

$$2 = x$$

oziroma do $x = 2$ (kot smo bolj navajeni).

Zgled 2. *Reši enačbo* $6 - x = 5x$.

Rešitev. Najprej na obeh straneh enačbe prištejemo x (ali: $-x$ prenesemo na desno kot $+x$) in dobimo $6 = 6x$, nato pa obe strani delimo s 6 in imamo $1 = x$ oziroma $x = 1$.

Zgled 3. *Reši enačbo* $1 - \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$.

Rešitev. Če ne želimo računati z ulomki, je najbolje, da obe strani enačbe pomnožimo s 6. Tako dobimo $6 - 2x = 3$. Če prenesemo 3 na levo stran, $-2x$ pa na desno, dobimo $6 - 3 = 2x$ oziroma $3 = 2x$ ter rešitev $x = \frac{3}{2}$.

Zakaj poudarjamo, da enačbe oziroma njenih strani **ne smemo množiti z** 0? Poglejmo, kaj se zgodi, če bi jo. Vzemimo kar enačbo iz zadnjega zgleda: $1 - \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$. Če obe strani množimo z 0, dobimo $(1 - \frac{x}{3}) \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot 0$, ki ima neskončno mnogo rešitev: katerokoli vrednost lahko postavimo namesto x. V vsakem primeru dobimo $0 = 0$. Enačba, ki smo jo dobili po množenju z 0, nima več le tiste rešitve, ki jo je imela prvotna enačba.

Zgled 4. *Poišči rešitve enačbe* $2x^2 - x = 3x^2$.

Rešitev. Enake količine oziroma izraze prenesemo na isto stran. Dobimo $-x = 3x^2 - 2x^2$ oziroma $-x = x^2$. Tu pomislimo, da bi delili obe strani enačbe z x, saj bi se le-ta poenostavila v $-1 = x$, kar je že rešitev. Če namreč zamenjamo x z -1 v prvotni enačbi, pridemo do $2 \cdot (-1)^2 - (-1) = 3 \cdot (-1)^2$ oziroma $3 = 3$.
Kanček previdnosti pa tu ni odveč. Delili smo z x, to je z neznano količino, ki je lahko enaka 0, zato moramo preveriti, ali ni morda tudi $x = 0$ rešitev enačbe. Če x v enačbi zamenjamo z 0, dobimo $2 \cdot 0 - 0 = 3 \cdot 0$ oziroma $0 = 0$, zato je tudi $x = 0$ rešitev.
Enačba $2x^2 - x = 3x^2$ ima dve rešitvi: -1 in 0.

Iz tega zgleda je razvidno, zakaj enačbe ne smemo deliti z 0. Običajno to napravimo povsem nehote, saj ne delimo s številom 0, pač pa z izrazom, ki lahko zavzame vrednost 0, s tem pa "izgubimo" rešitev.

Seveda srečujemo tudi enačbe, ki nimajo rešitve, in enačbe, ki jih reši vsako število. Oglejmo si primera.

Zgled 5. *Reši enačbo* $3x - 5 = \frac{6x+2}{2}$.

Rešitev. Enačbo pomnožimo z 2: $6x - 10 = 6x + 2$. Če $6x$ prenesemo na levo, dobimo $-10 = 2$, kar ne drži. Enačba nima rešitve. To pomeni, da enačaj ne velja pri nobeni vrednosti, ki jo postavimo namesto x.

Zgled 6. *Poišči rešitev enačbe* $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{6} = \frac{2x-1}{3} - \frac{1}{6}$.

Rešitev. Enačbo pomnožimo s 6: $3x - 3 + x = 4x - 2 - 1$ in jo preuredimo v $4x - 3 = 4x - 3$. Leva stran je enaka desni ne glede na to, katero vrednost vstavimo namesto x.

Včasih lahko sestavimo enačbo, ki ustreza besedilni nalogi, in jo rešimo. Oglejmo si nekaj nalog s tekmovanja *Evropski matematični kenguru* (EMK).

Zgled 7. *(EMK, 1996, 5. in 6. razred)*
Trikotnik ima majhen kot, srednje velik kot, ki je dvakratnik manjšega, in velik kot, ki je trikratnik manjšega. Ta trikotnik je:
*(**A**) katerikoli (**B**) pravokoten (**C**) enakostraničen (**D**) enakokrak (**E**) enakokrak pravokoten*

Rešitev. Naj bo majhen kot enak α. Tedaj je srednje velik kot enak $2 \cdot \alpha$, velik pa $3 \cdot \alpha$. Vemo, da je vsota kotov v trikotniku enaka $180°$, zato zapišemo $\alpha + 2 \cdot \alpha + 3 \cdot \alpha = 180$, od koder sledi $6 \cdot \alpha = 180$ in $\alpha = 30$. Trikotnik ima kote $30°$, $60°$ in $90°$, torej je pravokoten, ni pa enakokrak pravokoten. Pravilen je odgovor (**B**).

Zgled 8. *(EMK, 1996, 7. in 8. razred)*
Janez in Aleš tekmujeta s kolesi na velodromu, to je sklenjeni krožni progi. Janez prevozi 1 krog v 6 min, Aleš pa v 4 min. Začneta skupaj in v isti smeri. Koliko minut po štartu bo Aleš prehitel Janeza?
*(**A**)* 24 *(**B**)* 12 *(**C**)* 10 *(**D**)* 6 *(**E**)* 4

Rešitev. Označimo s t čas, ko bo Aleš prehitel Janeza. Ker Aleš potrebuje 4 min za en krog, bo v tem času prevozil $\frac{t}{4}$ krogov. Janez bo v tem času prevozil $\frac{t}{6}$ krogov. Ko bo Aleš prehitel Janeza, bo prevozil 1 krog več kot Janez, zato je $\frac{t}{4} = \frac{t}{6} + 1$. Da bi odpravili ulomke, pomnožimo obe strani enačbe z 12. Tako dobimo $3t = 2t + 12$. Prenesemo $2t$ na levo stran, pa imamo $3t - 2t = 12$ oziroma $t = 12$. Aleš bo prehitel Janeza 12 min po štartu.

Zgled 9. *(EMK, 1997, 7. in 8. razred)*
Vstopnina za muzej stane 50 *tolarjev za otroke in* 100 *tolarjev za odrasle. V nedeljo je muzej obiskalo* 50 *ljudi. Vsi skupaj so za vstopnino plačali* 3500 *tolarjev. Koliko odraslih je bilo med obiskovalci?*
*(**A**)* 18 *(**B**)* 20 *(**C**)* 25 *(**D**)* 40 *(**E**)* 45

Rešitev. Denimo, da je bilo v muzeju x odraslih. Otrok je bilo $50 - x$. Vsi skupaj so za vstopnino plačali $100 \cdot x + 50 \cdot (50 - x) = 3500$. V enačbi najprej odpravimo oklepaje: $100 \cdot x + 2500 - 50 \cdot x = 3500$, nato pa 2500 prenesemo na desno stran: $100 \cdot x - 50 \cdot x = 3500 - 2500$. Od tod sledi $50 \cdot x = 1000$ oziroma $x = 20$. Med obiskovalci je bilo 20 odraslih.

Zgled 10. *(EMK, 1997, 7. in 8. razred)*
Oče na trgu kupi jabolka, hruške, banane in pomaranče. V košari ima skupaj 44 sadežev. Število jabolk je za 2 *večje od od števila hrušk, število hrušk je za* 8 *večje od števila banan, število banan pa je za* 2 *večje od števila pomaranč. Koliko hrušk je v košari?*
*(**A**)* 12 *(**B**)* 14 *(**C**)* 15 *(**D**)* 16 *(**E**)* 18

Rešitev. Glede na besedilo naloge je najmanj pomaranč, zato njihovo število označimo z x. Potem je v košari $x + 2$ banan, $x + 2 + 8 = x + 10$ hrušk in $x + 10 + 2 = x + 12$ jabolk. Vseh sadežev je 44, zato velja: $x + x + 2 + x + 10 + x + 12 = 44$, kar preuredimo v $4x = 44 - 24$, od tod pa dobimo $x = 5$. V košari je 15 hrušk.

Naloge

1. Reši enačbo $2x - 3 = x + 7$.
2. Reši enačbo $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x}{6}$.
3. Reši enačbo $x^2 - 4x = 2x$.
4. Tina bo čez 14 let imela trikrat toliko let, kot jih ima sedaj. Koliko je stara?
5. Če kvadratu nekega števila prišteješ trikratnik tega števila, dobiš kvadrat za 1 večjega števila. Katero število je to?.
6. Kvadrata dveh zaporednih sodih števil se razlikujeta za 68. Kateri sta ti števili?
7. Ali se lahko kvadrata dveh zaporednih lihih števil razlikujeta za 100?

Potenca točke na krožnico

Naj bo v ravnini dana krožnica $\mathcal{K}$ s polmerom r, $r > 0$, ter središčem v točki O in naj bo X poljubna točka te ravnine. Število

$$\overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{XO} - r^2$$

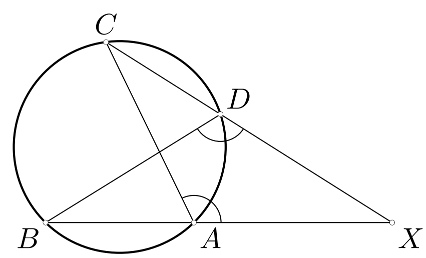
imenujemo *potenca točke X na krožnico $\mathcal{K}$* in ga označimo s $\mathcal{P}(X, \mathcal{K})$. Glede na lego točke X lahko zavzame število $\mathcal{P}(X, \mathcal{K})$ vse vrednosti z intervala $[-r^2, \infty)$. Če je $\mathcal{P}(X, \mathcal{K}) > 0$, je $|XO| > r$ in točka X leži zunaj kroga, omejenega s $\mathcal{K}$. Če je $\mathcal{P}(X, \mathcal{K}) < 0$, je $|XO| < r$ in točka X leži znotraj kroga, omejenega s $\mathcal{K}$. Če pa je $\mathcal{P}(X, \mathcal{K}) = 0$, je $|XO| = r$ in točka X leži na krožnici $\mathcal{K}$.

Izrek 1. *Naj premica skozi točko X seka krožnico $\mathcal{K}$ v točkah A in B. Potem velja*

$$\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = \mathcal{P}(X, \mathcal{K}).$$

Dokaz. Naj neka druga premica skozi točko X seka krožnico $\mathcal{K}$ v točkah C in D.

Glede na lego točke X ločimo tri primere. Če leži točka X na krožnici $\mathcal{K}$, je $X = A$ ali $X = B$ in je zato $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = 0 = \mathcal{P}(X, \mathcal{K})$. Podobno je tudi $X = C$ ali $X = D$ in $\overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XD} = 0$.



Če leži točka X zunaj kroga, omejenega s krožnico $\mathcal{K}$, smemo privzeti, da leži točka B med A in X ter točka C med D in X. V produktih $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}$ in $\overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XD}$ smemo namreč med seboj zamenjati A in B ter C in D. Ker v tem primeru ležita točki B in C na istem bregu premice AD, velja $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA$. Torej sta si trikotnika XBD in XCA podobna: imata skupen kot pri X in $\sphericalangle XBD = \sphericalangle ACX$. Potem lahko zapišemo $\frac{|XB|}{|XD|} = \frac{|XC|}{|XA|}$, od koder sledi

$$\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = |XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD| = \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XD}.$$

V gornjem računu smo upoštevali, da sta vektorja $\overrightarrow{XA}$ in $\overrightarrow{XB}$ kolinearna in enako usmerjena, zato je $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = |XA| \cdot |XB|$. Podobno je tudi $\overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XD} = |XC| \cdot |XD|$. Torej smo dokazali, da je vrednost produkta $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}$ enaka za vse premice skozi X, ki sekajo krožnico $\mathcal{K}$ v dveh točkah. Če označimo z O središče krožnice $\mathcal{K}$, z A' in B' pa presečišči premice OX s krožnico $\mathcal{K}$, velja

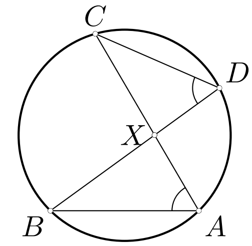
$$\overrightarrow{XA'} \cdot \overrightarrow{XB'} = (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA'}) \cdot (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA'}) \cdot (\overrightarrow{XO} - \overrightarrow{OA'}) = \overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{XO} - r^2.$$

Če seka premica skozi X krožnico $\mathcal{K}$ v eni točki, velja $A = B$ in $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = |XA|^2$. Premica XA je tedaj tangenta na krožnico $\mathcal{K}$ in po Pitagorovem izreku velja $|XA|^2 = |XO|^2 - r^2$. Torej je res

$$\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = \mathcal{P}(X, \mathcal{K})$$

za vse premice skozi točko X, če X leži zunaj kroga, omejenega s $\mathcal{K}$.

Oglejmo si še primer, ko leži točka X znotraj kroga, omejenega s $\mathcal{K}$. Podobno kot prej sta si trikotnika XBD in XCA podobna in velja $\frac{|XB|}{|XD|} = \frac{|XC|}{|XA|}$. Ker sta tedaj kolinearna vektorja $\overrightarrow{XA}$ in $\overrightarrow{XB}$ nasprotno usmerjena, izračunamo



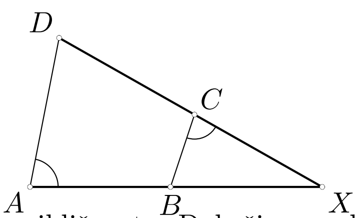
$$\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = -|XA| \cdot |XB| = -|XC| \cdot |XD| = \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XD}.$$

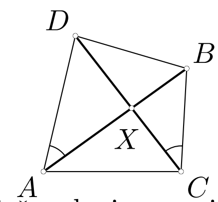
Enakost $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = \mathcal{P}(X, \mathcal{K})$ dokažemo kot prej tako, da izračunamo vrednost produkta $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}$ za premico XO.

Izrek 2. (Potenca točke na krožnico) *Naj bodo A, B, C in D različne točke v ravnini in točka X presečišče premic AB in CD. Točke A, B, C in D so koncikliče natanko tedaj, ko je $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XD}$.*

Dokaz. V izreku 1 smo dokazali, da za konciklične točke A, B, C in D, kjer so A, B in X ter C, D in X kolinearne, velja

$$\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = \mathcal{P}(X, \mathcal{K}) = \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XD}. \qquad (1)$$





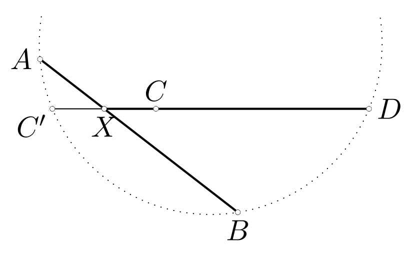
Torej je pogoj (1) potreben za potreben za konciklićnost. Dokažimo sedaj še, da je pogoj zadosten.

Enakost $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XD} = 0$ ni možna, saj bi v tem primeru točke A, B, C in D ne bile različne.

Če je $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} > 0$, sta kolinearna vektorja $\overrightarrow{XA}$ in $\overrightarrow{XB}$ enako usmerjena in točka X ne leži na daljici AB. Ker se vrednost produkta $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}$ ne spremeni, če zamenjamo točki A in B med seboj, smemo privzeti, da leži točka B med A in X. Iz $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XD} > 0$ sledi, da tudi X ne leži na daljici CD in podobno kot prej smemo privzeti, da leži C med X in D. (Glej levo sliko.) Ker je $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = |XA| \cdot |XB|$ in $\overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XD} = |XC| \cdot |XD|$, iz (1) sledi $\frac{|XA|}{|XD|} = \frac{|XC|}{|XB|}$. Torej sta si trikotnika XAD in XCB podobna. Kota $\sphericalangle XAD$ in $\sphericalangle XCB$ sta zato enaka in je $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \pi$. Konciklićnost točk A, B, C in D je tako dokazana.

V primeru $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} < 0$ pa najprej razmislimo, da mora točka X ležati med A in B. Podobno mora tudi X ležati med C in D. Ker je $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = -|XA| \cdot |XB|$ in $\overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XD} = -|XC| \cdot |XD|$, iz pogoja (1) sledi $\frac{|XA|}{|XD|} = \frac{|XC|}{|XB|}$. Torej sta si trikotnika XAD in XCB podobna in iz $\sphericalangle XAD = \sphericalangle XCB$ konciklićnost takoj sledi. ■

Opomba. Pri izreku o potenci točke na krožnico je **bistveno**, da zapišemo pogoj v vektorski obliki, saj iz enakosti



$$|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD|,$$

kjer je X presečišče premic AB in CD, v splošnem ne sledi

$$\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XD}.$$

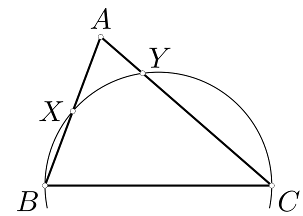
Kot kaže slika desno, lahko velja $|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD|$, čeprav točke A, B, C in D niso koncikliče. (Za točko C velja $|XC| = |XC'|$, kjer so točke A, B, C' in D koncikliče.)

Zgled 1. *Naj bo AB osnovnica enakokrakega trikotnika ABC. Krožnica s premerom BC seka stranici AB in AC v točkah X in Y. Izrazi dolžini $|AX|$ in $|AY|$ z dolžinama $|AB|$ in $|AC|$.*

Rešitev. Po Talesovem izreku je $\sphericalangle BXC = \frac{\pi}{2}$. Točka X je torej nožišče višine na osnovnico in je zato $|AX| = \frac{1}{2}|AB|$. Ker so točke X, B, C in Y konciklične, je

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{AC},$$

od koder sledi $|AY| = \frac{1}{2}\frac{|AB|^2}{|AC|}$.



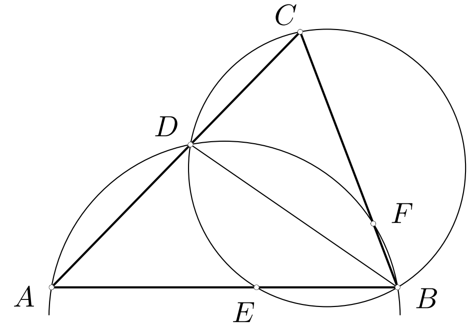
Zgled 2. *Naj notranja simetrala kota CBA trikotnika ABC seka nasprotno stranico v točki D. Krožnici, očrtani trikotnikoma ABD in BCD naj sekata premici BC in AB še v točkah F in E. Dokaži, da je $|AE| = |CF|$.*

Rešitev. Po izreku o potenci točke A na krožnico, očrtano trikotniku BCD, velja

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Po izreku o potenci točke C na krožnico, očrtano trikotniku ABD, velja

$$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}.$$



Ker točki A in C ležita zunaj očrtanih krožnic trikotnikov BCD in ABD, lahko gornji enakosti zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} |AE| \cdot |AB| &= |AD| \cdot |AC| \text{ in} \\ |CF| \cdot |CB| &= |CD| \cdot |CA|. \end{aligned}$$

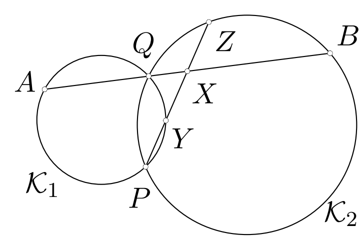
Torej je $\frac{|AE|}{|CF|} = \frac{|AD|\cdot|CB|}{|AB|\cdot|CD|}$. Ker je BD simetrala kota $\sphericalangle CBA$, razdeli nasprotno stranico v razmerju dolžin priležnih stranic. Sledi $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|CB|}$, od koder izpeljemo $\frac{|AE|}{|CF|} = \frac{|AD|\cdot|CB|}{|AB|\cdot|CD|} = 1$ in $|AE| = |CF|$.

Zgled 3. *Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ se sekata v točkah P in Q. Premica AB, ki seka krožnico $\mathcal{K}_1$ v točkah A in Q, krožnico $\mathcal{K}_2$ pa v točkah B in Q, ne vsebuje točke P. Premica skozi P in razpolovišče X daljice AB seka krožnico $\mathcal{K}_1$ v točkah P in Y, krožnico $\mathcal{K}_2$ pa v točkah P in Z. Dokaži, da je $|XY| = |XZ|$.*

Rešitev. Zapišimo potenco točke X na krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$:

$$\mathcal{P}(X, \mathcal{K}_1) = \overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XP},$$

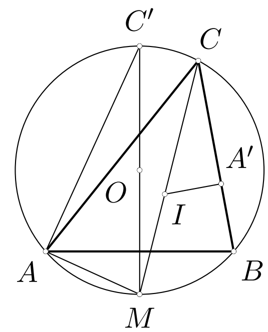
$$\mathcal{P}(X, \mathcal{K}_2) = \overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XZ} \cdot \overrightarrow{XP}.$$



Ker je $\overrightarrow{XA} = -\overrightarrow{XB}$, iz gornjih enakosti sledi $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XP} = -\overrightarrow{XZ} \cdot \overrightarrow{XP}$ in od tod $(\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{XZ}) \cdot \overrightarrow{XP} = 0$. Ker sta vektorja $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{XZ}$ in $\overrightarrow{XP}$ kolinearna in je $\overrightarrow{XP}$ neničelni vektor, je $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{XZ} = 0$ in zato $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{XZ}$. Sledi $|XY| = |XZ|$.

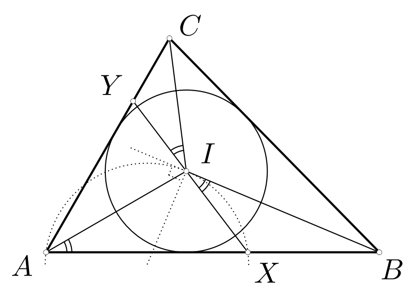
Opomba. Opozoriti velja, da iz vektorske enačbe $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ v splošnem ne sledi $\vec{a} = \vec{b}$, ampak kvečjemu $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{c}$. Šele z dodatnim pogojem, da so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ kolinearni in $\vec{c} \neq 0$, lahko sklepamo, da je $\vec{a} = \vec{b}$.

Zgled 4. *Trikotniku ABC očrtana krožnica naj ima polmer R in središče v točki O, njemu včrtana krožnica pa naj ima polmer r in središče v točki I. Dokaži, da je $|IO|^2 = R^2 - 2Rr$.*



Rešitev. Simetrala kota $\sphericalangle ACB$ naj seka očrtano krožnico v točki M, včrtana krožnica naj se dotika stranice BC v točki A', presečišče premice MO z očrtano krožnico pa označimo s C'. Ker je A' dotikališče včrtane krožnice s stranico BC, je $IA' \perp A'C$. Ker je MC' premer očrtane krožnice, po Talesovem izreku velja $MA \perp AC'$. Premica CM je simetrala kota $\sphericalangle ACM$, zato je $\sphericalangle ICA' = \sphericalangle ACM$. Zaradi enakosti obodnih kotov nad tetivo AM pa velja $\sphericalangle AC'M = \sphericalangle ACM$. Torej je $\sphericalangle AC'M = \sphericalangle ICA'$ in sta si pravokotna trikotnika AMC' in $A'IC$ podobna. Velja $\frac{|MA|}{|MC'|} = \frac{|IA'|}{|IC|}$ in odtod $|MA| \cdot |IC| = |MC'| \cdot |IA'| = 2Rr$. Ker je $|MA| = |MI|$ (glej npr. izrek 4, Brihtnež 1, str. 20), sledi $|IM| \cdot |IC| = 2Rr$ oziroma $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IC} = -|IM| \cdot |IC| = -2Rr$. Ker je potenca točke I na očrtano krožnico enaka $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IC} = |IO|^2 - R^2$, sledi $|IO|^2 = R^2 - 2Rr$.

Zgled 5. *Središče trikotniku ABC včrtane krožnice označimo z I. Naj bosta X in Y taki točki na daljicah AB in AC, da je $|BX| \cdot |AB| = |IB|^2$ in $|CY| \cdot |AC| = |IC|^2$. Določi vse možne vrednosti kota $\sphericalangle BAC$, če veš, da so točke I, X in Y kolinearne.*



Rešitev. Z upoštevanjem pravilnih smeri vektorjev lahko zapišemo pogoj $|BX| \cdot |AB| = |IB|^2$ v vektorski obliki:

$$\overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BI}.$$

Torej je premica BI tangenta na trikotniku AXI očrtano krožnico v točki I. Ker je kot med tetivo XI in tangento BI enak obodnemu kotu $\sphericalangle XAI$ nad to tetivo, je $\sphericalangle XIB = \sphericalangle XAI = \frac{\alpha}{2}$. (Daljica AI je namreč simetrala kota $\sphericalangle BAC = \alpha$.) Podobno iz pogoja $|CY| \cdot |AC| = |IC|^2$ sledi

$$\overrightarrow{CY} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CI},$$

zato je premica CI tangenta na trikotniku AYI očrtano krožnico v točki I in $\sphericalangle CIY = \frac{\alpha}{2}$. Ker pa je $\sphericalangle BIC = \pi - \sphericalangle CBI - \sphericalangle ICB = \pi - (\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}) = \pi - \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$, iz $\sphericalangle XIB + \sphericalangle BIC + \sphericalangle CIY = \pi$ izpeljemo $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Izrek 3. (Izrek o potenčni premici) *V ravnini naj ležita krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ s polmeroma r_1 in r_2 ter različnima središčima O_1 in O_2. Množica tistih točk X v ravnini, za katere je $\mathcal{P}(X, \mathcal{K}_1) = \mathcal{P}(X, \mathcal{K}_2)$, je premica, ki jo imenujemo* potenčna premica krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$.

Potenčna premica je pravokotna na premico O_1O_2 in če se krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ sekata, poteka njuna potenčna premica skozi obe presečišči.

Dokaz. Trditev najhitreje dokažemo analitično. Če sta krožnici podani z enačbama

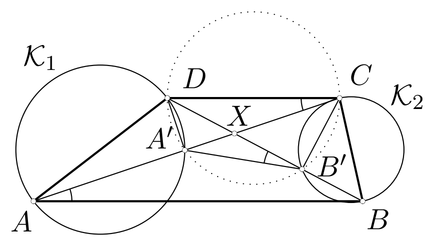
$$(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = r_1^2, \tag{2}$$
$$(x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 = r_2^2, \tag{3}$$

ležijo na potenčni premici vse točke (x, y), ki ustrezajo gornjem sistemu. Če enačbo (3) odštejemo od enačbe (2), po preureditvi dobimo

$$2(p_2 - p_1)\, x + 2(q_2 - q_1)\, y = p_2^2 - p_1^2 + q_2^2 - q_1^2 + r_1^2 - r_2^2. \tag{4}$$

Ker sta središči krožic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ različni, je $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$. Enačba (4) tako res opisuje premico, njen smerni vektor pa je pravokoten na vektor $(p_2 - p_1, q_2 - q_1)$.

Zgled 6. *V ravnini leži tak trapez, da leži presečišče njegovih diagonal izven krogov, ki ju omejujeta krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$. Premera krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ sta kraka tega trapeza. Iz presečišča njegovih diagonal potegnemo tangente na krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$. Dokaži, da so vsi štirje tangentni odseki enako dolgi.*



Rešitev. Če dokažemo, da leži točka X na potenčni premici krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, bodo vsi štirje tangentni odseki enako dolgi.
Privzemimo oznake s slike. Ker sta DAA' in $CB'B$ pravokotna trikotnika in zato tudi $DA'C$ in $DB'C$ pravokotna trikotnika, ležijo točke A', B', C in D na eni krožnici. Torej je $\sphericalangle DB'A' = \sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC$ oziroma $\sphericalangle XB'A' = \sphericalangle BAX$. Podobno je tudi $\sphericalangle B'A'X = \sphericalangle XBA$. Trikotnika ABX in $B'A'X$ sta si zato podobna. Torej je $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|B'X|}{|A'X|}$, kar lahko zapišemo tudi v obliki $|XA| \cdot |XA'| = |XB| \cdot |XB'|$. Ker leži točka X izven krogov, ki ju omejujeta krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, od tod sledi $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XA'} = \overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{XB'}$. Točka X torej leži na potenčni premici krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$.

Izrek 4. (Izrek o potenčnem središču) *Potenčne premice treh krožnic z nekolinearnimi središči se sekajo v eni točki. Presečno točko imenujemo* potenčno središče treh krožnic.

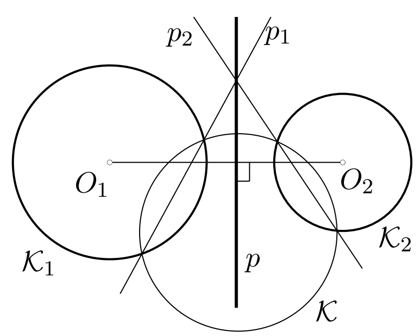
Dokaz. Označimo krožnice: $\mathcal{K}_i(O_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$, in naj bo p_{ij}, potenčna premica krožnic $\mathcal{K}_i$ in $\mathcal{K}_j$, $i \neq j$. Ker središča krožnic niso kolinearna, se poljubni dve potenčni premici sekata. Označimo presečišče premic p_{12} in p_{23} z X. Potem je

$$|XO_1|^2 - r_1^2 = |XO_2|^2 - r_2^2 \quad \text{in} \quad |XO_2|^2 - r_2^2 = |XO_3|^2 - r_3^2,$$

od koder sledi $|XO_1|^2 - r_1^2 = |XO_3|^2 - r_3^2$, oziroma $X \in p_{13}$.

Opomba. Iz izreka 3 sledi, da so potenčne premice treh krožnic s kolinearnimi središči vzporedne.

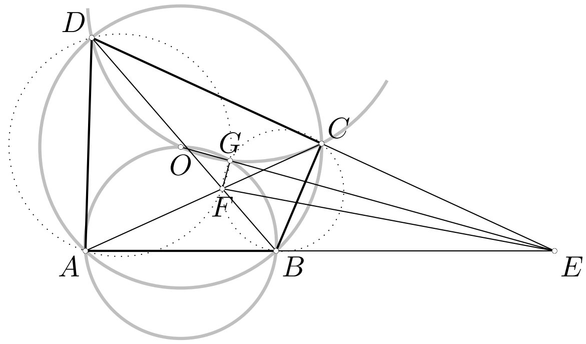
Zgled 7. *Konstruiraj potenčno premico danih dveh krožnic.*



Rešitev. Uporabimo izrek, da se potenčne premice treh krožnic z nekolinearnimi središči sekajo v isti točki. Narišimo krožnico $\mathcal{K}$ tako, da seka dani krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ in da središča niso kolinearna. Potenčna premica p_1 krožnic $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}_1$ poteka skozi presečišči krožnic $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}_1$. Podobno poteka tudi potenčna premica p_2 krožnic $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}_2$ skozi presečišči krožnic $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}_2$. Ker središča krožnic niso kolinearna, premici p_1 in p_2 nista vzporedni. Iskana potenčna premica p tedaj poteka skozi presečišče premic p_1 in p_2 in je na premico O_1O_2 pravokotna.

Zaključimo prispevek o potenci točke na krožnico s tipičnima tekmovalnima nalogama, ki zahtevata dobro poznavanje dosedanje teorije o potenci točke na krožnico in koncikličnosti.

Zgled 8. *Dan je tetivni štirikotnik $ABCD$. Premici AB in CD naj se sekata v točki E, diagonali AC in BD pa v točki F. Očrtani krožnici trikotnikov AFD in BFC se sekata v različnih točkah F in G. Dokaži, da se premici EG in FG sekata pravokotno.*



Rešitev. Označimo z O središče tetivnemu štirikotniku $ABCD$ očrtane krožnice. Z usmerjenimi koti izračunamo

$$\begin{aligned} \measuredangle AGB &= \measuredangle AGF + \measuredangle FGB = \\ &= \measuredangle ADF + \measuredangle FCB = \\ &= \measuredangle ADB + \measuredangle ACB = \measuredangle AOB, \end{aligned}$$

kjer velja zadnja enakost zaradi $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB = \frac{1}{2}\measuredangle AOB$. Po izreku o koncikličnosti za usmerjene kote je $ABGO$ tetivni štirikotnik. Podobno lahko z usmerjenimi koti dokažemo, da je tudi $CDOG$ tetivni štirikotnik. Ker poteka potenčna premica dveh sekajočih se krožnic skozi njuni presečišči, se potenčne premice krožnic, očrtane tetivnim štirikotnikom $ABCD$, $ABGO$ in $CDOG$, sekajo v eni točki – točki E. Točke E, G in O so zato kolinearne. Nazadnje izračunamo

$$\begin{aligned} \measuredangle OGF &= \measuredangle OGC + \measuredangle CGF = \measuredangle ODC + \measuredangle CBF = \\ &= \left(\tfrac{\pi}{2} - \measuredangle CAD\right) + \measuredangle CBD = \tfrac{\pi}{2} = \measuredangle EGF. \end{aligned}$$

Opomba. Zakaj smo pri rešitvi naloge uporabili usmerjene kote? Ključni problem je uporaba izreka o koncikličnosti in z njim povezan račun s koti. Po konstrukciji leži točka G na krožnici skozi A, F in D, vendar ne vemo v kakšnem vrstnem redu si te točke sledijo na tej krožnici. Podobno tudi ne vemo, v kakšnem vrstnem redu si točke B, F, C in G sledijo na drugi krožnici. Če bi dokaz zapisali le z navadnimi koti, bi bil veljaven le za narisano konfiguracijo na sliki, ne pa tudi v splošnem.

Bralca vabimo, da poskusi narisati vsaj še dve bistveno različni skici k gornji nalogi in zapisati rešitvi najprej z **običajnimi koti**, nato pa še z **usmerjenimi koti**.

Zgled 9. *Naj bo $\mathcal{K}$ dana krožnica, P in Q pa točki na njej. Naj bo M razpolovišče tetive PQ, A in C pa taki točki na $\mathcal{K}$, da gre daljica AC skozi M. V trapezu $ABCD$ naj bosta med seboj vzporedni stranici AB in CD vzporedni tudi s tetivo PQ, dana krožnica $\mathcal{K}$ pa naj bo očrtana trapezu $ABCD$. Dokaži, da se AD in BC sekata v točki X, ki ni odvisna od izbire točke A na $\mathcal{K}$.*

Podrobna rešitev te naloge je zapisana v prispevku o Sredozemskem matematičnem tekmovanju 2001 (stran 20), na tem mestu zapišimo le, da naj bralec poskusi dokazati, da so točke A, O, M in D konciklične, kjer smo z O označili središče krožnice $\mathcal{K}$.

Naloge

Pri geometrijskih nalogah je najprej potrebno narisati dovolj veliko in natančno skico. Ker pri nalogah pogosto obravnavamo koncikličnost, je potrebno izrek o koncikličnosti skrbno zapisati. Vsako nalogo najprej reši glede na narisano skico, nato pa razmisli, ali je zapisani dokaz veljaven tudi pri kakšni drugačni konfiguraciji. Običajno se analizi več primerov izogneš z uporabo usmerjenih kotov. Pri uporabi izreka o potenci točke na krožnico tudi ne pozabi, da je treba algebraični pogoj zapisati v **vektorski obliki**.

1. Dan je ostrokotni trikotnik ABC. Višina iz B seka krožnico s premerom AC v točkah P in Q, višina iz C pa seka krožnico s premerom AB v točkah M in N. Dokaži, da je štirikotnik $NPMQ$ tetiven. Kje leži središče njemu očrtane krožnice?

2. Dana je polkrožnica s središčem O in premerom AB. Na premici AB je izbrana takšna točka M, da je $|AM| > |BM|$. Točka M leži izven daljice AB. Premica skozi M seka krožni lok $\widehat{AB}$ v takih točkah C in D, da je $|CM| < |DM|$. Očrtani krožnici trikotnikov AOD in OBC se sekata v točkah O in K.

   Dokaži, da se premici OK in KM sekata pravokotno.

3. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ s središčima O_1 in O_2 se od zunaj dotikata v točki T in se od znotraj dotikata krožnice $\mathcal{K}$ s središčem O v točkah A in B. Skupna tangenta krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ v točki T seka krožnico $\mathcal{K}$ v točkah K in L. Označimo s C razpolovišče daljice KL. Dokaži, da je KL simetrala kota $\sphericalangle BCA$ in $\sphericalangle O_1OO_2 = \sphericalangle ACB$.

4. Dana je krožnica $\mathcal{K}$ s središčem O in premica ℓ izven nje. Označimo z M nožišče pravokotnice na ℓ iz O. Izberimo poljubno točko $P \in \mathcal{K}$. Krožnica s premerom PM seka krožnico $\mathcal{K}$ še v točki X in premico l še v točki Y. Dokaži, da potekajo vse daljice XY skozi fiksno točko, ko lego točke $P \in \mathcal{K}$ spreminjamo.

5. Na stranicah AB in AC trikotnika ABC ležita taki točki D in E, da je $DE \parallel BC$. Naj bo P poljubna točka v notranjosti trikotnika ABC. Premici PB in PC sekata DE v F in G. Označimo središči trikotnikoma PDG in PFE očrtanih krožnic zaporedoma z O_1 in O_2. Dokaži, da je $AP \perp O_1O_2$.

6. Na osnovnici AB trapeza $ABCD$ leži takšna točka F, da je $|CF| = |DF|$. Presečišče premic AC in BD označimo z E, središči trikotnikoma ADF in BCF očrtanih krožnic pa z O_1 in O_2. Dokaži, da je $EF \perp O_1O_2$.

Sredozemsko matematično tekmovanje 2001

Naloge

1. Naj bo $\mathcal{K}$ dana krožnica, P in Q pa točki na njej. Naj bo M razpolovišče tetive PQ, A in C pa taki točki na $\mathcal{K}$, da gre daljica AC skozi M. V trapezu $ABCD$ naj bosta med seboj vzporedni stranici AB in CD vzporedni tudi s tetivo PQ, dana krožnica $\mathcal{K}$ pa naj bo očrtana trapezu $ABCD$. Dokaži, da se AD in BC sekata v točki X, ki ni odvisna od izbire točke A na $\mathcal{K}$.

2. Poišči vsa taka cela števila n, za katera lahko polinom $p(x) = x^5 - nx - n - 2$ zapišemo kot produkt dveh nekonstantnih polinomov s celimi koeficienti.

3. Dokaži, da obstaja naravno število N, za katerega se zapis števila 2000^N v desetiškem sistemu začne z zaporedjem števk 200120012001.

4. Dan je enakostranični trikotnik ABC s stranico 1. Z Δ je označena množica vseh točk, ki ležijo v njegovi notranjosti ali na robu trikotnika. Za vsak $M \in \Delta$ z a_M, b_M in c_M označimo razdalje od točke M do stranice BC, CA oziroma AB. Definirajmo funkcijo

$$f(M) = a_M^3(b_M - c_M) + b_M^3(c_M - a_M) + c_M^3(a_M - b_M).$$

   (a) Podaj geometrijski opis množice $\{M \in \Delta; \quad f(M) \geq 0\}$.

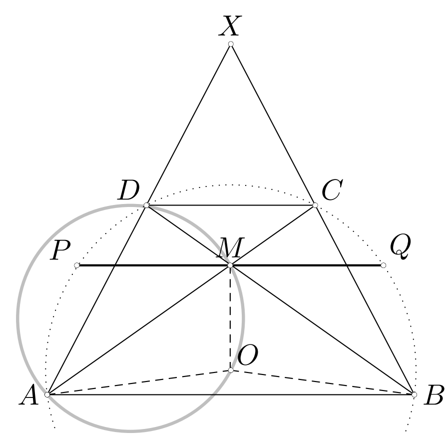
   (b) Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(M)$ za $M \in \Delta$ ter točke, v katerih sta ti vrednosti doseženi.

Rešitve nalog

1. Ker je $AB \parallel PQ$ in je M razpolovišče PQ, je $MO \perp AB$, kjer smo z O označili središče krožnice $\mathcal{K}$. Torej je

$$\sphericalangle ADM = \sphericalangle ADB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOM$$

in je $AOMD$ tetivni štirikotnik. Po izreku o potenci točke X na krožnico skozi točke A, O, M in D je $\overrightarrow{XD} \cdot \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XM} \cdot \overrightarrow{XO}$. Ker po izreku o potenci točke na krožnico skozi točke A, B, C in D velja še $\overrightarrow{XD} \cdot \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{XO} - r^2$, sledi $r^2 = \overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{XO} - \overrightarrow{XM} \cdot \overrightarrow{XO} = \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{XO}$. Ker vemo, da so točke O, M in X kolinearne, je z enakostjo $r^2 = \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{XO}$ lega točke X natančno določena (in neodvisna od A).



2. Denimo, da lahko zapišemo $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$, kjer sta $p_1(x)$ in $p_2(x)$ nekonstantna polinoma s celimi koeficienti. Ločimo dva primera: eden izmed polinomov $p_1(x)$ in $p_2(x)$ je stopnje 1 in drugi stopnje 4 ali pa je eden izmed polinomov stopnje 2 in drugi stopnje 3. Privzamemo lahko, da je $\deg(p_1) < \deg(p_2)$ in da imata oba vodilni koeficient enak 1.

   Lotimo se najprej prvega primera: $\deg(p_1) = 1$ in $\deg(p_2) = 4$. Ker je vodilni koeficient polinoma $p_1(x)$ enak 1, ima ta polinom celo ničlo, zato ima tudi polinom $p(x)$ celo ničlo. Poiskati moramo torej taka cela števila n, za katera ima $p(x)$ celo ničlo. Naj bo $y \in \mathbb{Z}$ ničla polinoma $p(x)$. Tedaj je $y^5 - 2 = n(y+1)$, od koder sklepamo, da je $y \neq -1$ in da je $n = \frac{y^5-2}{y+1} = y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 - \frac{3}{y+1}$. To pomeni, da $y+1$ deli 3 in da je torej y lahko enak -4, -2, 0 ali 2. Število n je lahko enako 342, 34, -2 ali 10. Naj k vsaki vrednosti števila n zapišemo še pripadajoči polinom $p(x)$, čeprav naloga to ne zahteva:

   $n = -2 \longrightarrow p(x) = x(x^4 + 2)$

   $n = 10 \longrightarrow p(x) = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 6)$

   $n = 34 \longrightarrow p(x) = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x - 18)$

   $n = 342 \longrightarrow p(x) = (x+4)(x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 64x - 86)$

   V drugem primeru je $\deg(p_1) = 2$ in $\deg(p_2) = 3$. Pišimo: $p_1(x) = x^2 + rx + q$ in $p_2(x) = x^3 + sx^2 + tx + u$, kjer so r, q, s, t in u cela števila. Ker je $p_1(x) \cdot p_2(x) = p(x)$ in v $p(x)$ ne nastopa x^4, mora biti $s = -r$. Potem ko s zamenjamo z $-r$ in primerjamo koeficiente pri x^3, pridemo do $t - r^2 + q = 0$. Od tod izrazimo t in nato primerjamo koeficiente pri x^2, kar prinese $u + r^3 - 2rq = 0$ oziroma $u = 2rq - r^3$. Tako pridemo do enakosti $(x^2 + rx + q)(x^3 - rx^2 + (r^2 - q)x + 2rq - r^3) = x^5 - nx - n - 2$ za primerna cela števila r, q in n. Izberimo $x = -1$, pa imamo $(1 - r + q)(-1 - r - r^2 + q + 2rq - r^3) = -3$ oziroma $(q - r + 1)(r^3 + r^2 + r + 1 - 2rq - q) = 3$. Izraza $q - r + 1$ in $r^3 + r^2 + r + 1 - 2rq - q$ sta torej celi števili in njun produkt je enak 3. Imamo štiri možnosti:

$q - r + 1 = -3$ $r^3 + r^2 + r + 1 - 2rq - q = -1$	$q - r + 1 = -1$ $r^3 + r^2 + r + 1 - 2rq - q = -3$
$q - r + 1 = 1$ $r^3 + r^2 + r + 1 - 2rq - q = 3$	$q - r + 1 = 3$ $r^3 + r^2 + r + 1 - 2rq - q = 1$

   Iz prvega sistema enačb dobimo $r^3 - r^2 + 8r + 6 = 0$, ki nima celoštevilskih rešitev. Iz drugega sistema dobimo $r^3 - r^2 + 4r + 6 = 0$, ki ima samo eno celoštevilsko rešitev, to je $r = -1$. Izračunamo še $q = -3$ in pridemo do $(x^2 - x - 3)(x^3 + x^2 + 4x + 7) = x^5 - 19x - 21$, od koder preberemo $n = 19$. Podobno ugotovimo, da tretji sistem nima celoštevilske rešitve, iz četrtega pa dobimo $r = -1$, $q = 1$ in $(x^2 - x - 3)(x^3 + x^2 - 1) = x^5 + x - 1$ ter $n = -1$.

   Rešitve naloge so torej cela števila -2, -1, 10, 19, 34 in 342.

3. Dokazali bomo splošnejšo trditev: *Naj bo a_1, a_2, ..., a_n zaporedje n števk. Potem obstaja naravno število N, za katerega se zapis števila 2000^N v desetiškem sistemu začne z zaporedjem števk $a_1 a_2 \ldots a_n$.*

   Označimo število $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ z z. Tako je $z = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$. Pokazati moramo, da je $2000^N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n e_1 e_2 \ldots e_m}$ za neko naravno število N, kjer je e_1, e_2, ... e_m zaporedje m števk. Z drugimi besedami: poiskati moramo tako naravno število N, da bo veljalo

   $$z \cdot 10^m \leq 2000^N < (z+1) \cdot 10^m \,,$$

   oziroma

   $$\log z + m \leq N(\log 2 + 3) < \log(z+1) + m$$

   (kjer smo vzeli desetiške logaritme).

   To je neposredna posledica naslednje trditve: *Naj bo α iracionalno število. Tedaj vsak* *interval (a,b) vsebuje vsaj eno število oblike $n\alpha+m$, kjer sta m in n celi števili.*

Da je to res, se hitro prepričamo. Oglejmo si števila $n\alpha+m$, kjer je m celo število, n pa izbiramo izmed 1, 2, ..., N, pri čemer vzamemo $N=[\frac{1}{b-a}]+2$. Po Dirichletovem principu sta med števili $n\alpha$ $(n=1,\ 2,\ldots,N)$ dve taki, katerih decimalna dela se razlikujeta za manj kot $h=\frac{1}{N-1}$. Ko dodamo ustrezen m, dobimo števili oblike $n\alpha+m$, ki se razlikujeta za d in velja $|d|<h<b-a$. Vsaj en cel večkratnik števila d leži znoter intervala (a,b). V našem primeru je $\alpha=\log 2+3$, $a=\log z$ in $b=\log(z+1)$.

4. Zapišimo

$$\begin{aligned}
f(M) &= a_M^3(b_M-c_M)+b_M^3(c_M-a_M)-c_M^3(b_M-c_M)-c_M^3(c_M-a_M)\\
&= (b_M-c_M)(c_M-a_M)(b_M^2+b_Mc_M+c_M^2-a_M^2-a_Mc_M-c_M^2)\\
&= (b_M-c_M)(c_M-a_M)(b_M-a_M)(a_M+b_M+c_M).
\end{aligned}$$

Očitno je $a_M+b_M+c_M=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) Izrazi b_M-c_M, c_M-a_M in b_M-a_M spremenijo predznak pri prehodu preko težiščnic AA_1, BB_1 oziroma CC_1. Če je T težišče trikotnika ABC, potem je $f(M)\geq 0$ natanko tedaj, ko M leži v notranjosti ali na robu trikotnikov TA_1B, TB_1C in TC_1A.

(b) Dovolj je, če poiščemo maksimum, saj funkcija spremeni le predznak, če se M preslika preko katere izmed težiščnic. Naj leži točka M v trikotniku TA_1B ali na njegovem robu. Tedaj je $a_M\leq c_M\leq b_M$. Če je $N\in BC$ in $MN\parallel AB$, je $c_N=c_M$, $a_N=0$ in $b_N=b_M+a_M$, zato je

$$f(N)=(b_N-c_N)(c_N-a_N)(b_N-a_N)\frac{\sqrt{3}}{2}\geq(b_M-c_M)(c_M-a_M)(b_M-a_M)\frac{\sqrt{3}}{2}=f(M)\,.$$

To pomeni, da je dovolj poiskati maksimum za primer, ko M leži na BA_1 (ko je $a_M=0$). Postavimo $b_M-c_M=x\in[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$. Iz $b_M+c_M=\frac{\sqrt{3}}{2}$ sledi $b_M=\frac{\sqrt{3}+2x}{4}$ in $c_M=\frac{\sqrt{3}-2x}{4}$. Poiskati moramo torej maksimum funkcije $g(x)=x\cdot\frac{\sqrt{3}-2x}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}+2x}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{32}(3x-4x^3)$ na intervalu $[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$. Uvedimo $x=\sin u$, $u\in[0,\frac{\pi}{3}]$. Ker je $3\sin u-4\sin^3 u=\sin 3u$, dobimo maksimum $\frac{\sqrt{3}}{32}$, če je $3u=\frac{\pi}{2}$ oziroma $x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. Tako je $M\in BA_1$ in $|MA_1|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Funkcija f doseže na množici Δ maksimum $\frac{\sqrt{3}}{32}$ v treh točkah, ki ležijo na BA_1, CB_1 oziroma AC_1, in sicer na razdalji $\frac{\sqrt{3}}{6}$ od A_1, B_1 oziroma C_1. Minimum $-\frac{\sqrt{3}}{32}$ doseže prav tako v treh točkah. Te ležijo na CA_1, AB_1 oziroma BC_1, in sicer na razdalji $\frac{\sqrt{3}}{6}$ od A_1, B_1 oziroma C_1.

Rešitve nalog iz prejšnje številke

K rešitvi naloge običajno vodi več poti in vse matematično veljavne rešitve so pravilne. V rešitvah, ki jih objavljamo, je izbrana tista pot, ki se najbolj ujema s prispevkom, v katerem je bila določena naloga zastavljena. Če se tvoja rešitev od navedene rešitve bistveno razlikuje, se o rešitvi pogovori s tvojim učiteljem matematike.

Veččleniki

1. (a) $(6x+2y)^2 = (6x)^2 + 2\cdot 6x \cdot 2y + (2y)^2 = 36x^2 + 24xy + 4y^2$
   (b) $(8-5x)^2 = 64 - 80x + 25x^2$
   (c) $(-4x^3 - 3xy)^2 = 16x^6 + 24x^4y + 9x^2y^2$
2. (a) $32^2 = 1024$
   (b) $46^2 = 2116$
   (c) $112^2 = 12544$
3. $90000000005^2 = 8100000000900000000025$
4. (a) $81x^4 + 198x^2 + 121 = (9x^2+11)^2$
   (b) $49x^2 - 42xy + 9y^2 = (7x-3y)^2$
   (c) $324 - 72y^3 + 4y^6 = (18-2y^3)^2$
5. (a) $(6x+2y)(6x-2y) = 36x^2 - 4y^2$
   (b) $(17x^2-12)(17x^2+12) = 289x^4 - 144$
   (c) $(14x-16y^3)(14x+16y^3) = 196x^2 - 256y^6$
6. (a) $169 - 64x^2 = (13+8x)(13-8x)$
   (b) $256x^2y^2 - 36 = (16xy+6)(16xy-6)$
   (c) $49x^4 - 81y^2z^2 = (7x^2+9yz)(7x^2-9yz)$
7. (a) $63 \cdot 57 = 3600 - 9 = 3591$
   (b) $96 \cdot 104 = 10000 - 16 = 9984$
   (c) $112 \cdot 108 = 12100 - 4 = 12096$
   (d) $7000000008 \cdot 6999999992 = 49000000000000000000 - 64 = 48999999999999999936$
8. (a) $(x-2y)^3 = x^3 + 3x^2\cdot(-2y) + 3x\cdot(-2y)^2 + (-2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
   (b) $(3x^2+4)^3 = 27x^6 + 108x^4 + 144x^2 + 64$
   (c) $(2x-5)^3 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$
9. (a) $x^2 + 6x + 5 = (x+1)(x+5)$
   (b) $x^2 - 13x + 40 = (x-8)(x-5)$
   (c) $x^2 - 3x - 40 = (x-8)(x+5)$

(d) $x^2 - 12x - 28 = (x-14)(x+2)$

10. Imenovalce razstavimo v produkte, ulomke razširimo na skupni imenovalec, poenostavimo števec in ga razstavimo v produkt in končno ulomek okrajšamo.

(a)

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-2x} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} &= \frac{x}{x(x-2)} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-x+x-2}{x(x-2)} = \\ &= \frac{1(x-2)}{x(x-2)} = \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{a+21}{9-a^2} - \frac{a+1}{3-a} - \frac{a}{3+a} &= \frac{a+21}{(3-a)(3+a)} - \frac{a+1}{3-a} - \frac{a}{3+a} = \\ &= \frac{a+21-(a+1)(3+a)-a(3-a)}{(3-a)(3+a)} = \\ &= \frac{a+21-a^2-4a-3-3a+a^2}{(3-a)(3+a)} = \\ &= \frac{-6a+18}{(3-a)(3+a)} = \\ &= \frac{6(3-a)}{(3-a)(3+a)} = \\ &= \frac{6}{3+a}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{a^2-4}{a} : \frac{5a^2-10a}{a-5} \cdot \frac{10a^2}{a^2-10a+25} &= \frac{(a+2)\,(a-2)\,(a-5)\cdot 10a^2}{a\cdot 5a\,(a-2)\,(a-5)^2} = \\ &= \frac{2\,(a+2)}{(a-5)}\end{aligned}$$

11. Tudi tu imenovalce razstavimo v produkte, ulomke razširimo na skupni imenovalec, poenostavimo števec in ga razstavimo v produkt in končno premislimo, če smemo ulomek okrajšati.

(a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+3} &= 0 \\ \frac{(x-2)\,(x+3) + 2\,(x-1)\,(x+3) - 3\,(x-1)\,(x-2)}{(x-1)\,(x-2)\,(x+3)} &= 0 \\ \frac{x^2+x-6+2x^2+4x-6-3x^2+9x-6}{(x-1)\,(x-2)\,(x+3)} &= 0 \\ \frac{14x-18}{(x-1)\,(x-2)\,(x+3)} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\,(7x-9) &= 0\\
7x &= 9\\
x &= \frac{9}{7}\\
R &= \left\{\frac{9}{7}\right\}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{2x+3}{x-1}-\frac{x+18}{x+6}-\frac{x^2+x}{x^2+5x-6} &= 0\\
\frac{2x+3}{x-1}-\frac{x+18}{x+6}-\frac{x^2+x}{(x-1)\,(x+6)} &= 0\\
\frac{(2x+3)\,(x+6)-(x+18)\,(x-1)-\left(x^2+x\right)}{(x-1)\,(x+6)} &= 0\\
\frac{2x^2+15x+18-x^2-17x+18-x^2-x}{(x-1)\,(x+6)} &= 0\\
\frac{-3x+36}{(x-1)\,(x+6)} &= 0\\
\frac{-3\,(x-12)}{(x-1)\,(x+6)} &= 0\\
x-12 &= 0\\
x &= 12\\
R &= \{12\}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2} &= 0\\
\frac{x^2+1}{(x-1)\,(x+1)}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2} &= 0\\
\frac{2\left(x^2+1\right)-2\,(x+1)-(x-1)\,(x+1)}{2\,(x-1)\,(x+1)} &= 0\\
\frac{2x^2+2-2x-2-x^2+1}{2\,(x-1)\,(x+1)} &= 0\\
\frac{x^2-2x+1}{2\,(x-1)\,(x+1)} &= 0\\
\frac{(x-1)^2}{2\,(x-1)\,(x+1)} &= 0\\
R &= \{\}
\end{aligned}$$

Množica rešitev je prazna, saj je števec enak nič le za $x = 1$, toda tedaj je tudi imenovalec enak nič.

Neenakosti

1. Ker je $3-b>3-c$, je $-b>-c$ in zato $c>b$. Potem pa velja tudi $c+5d>b+5d$. Ker je $b+5a>c+5d$ in $c+5d>b+5d$, dobimo $b+5a>b+5d$ in od tod $5a>5d$, torej $a>d$. Nadalje je $2d-a>c$, zato je $2d>a+c$. Ker je $a>d$ in zato $a+c>d+c$, je $2d>d+c$ in $d>c$. Povzemimo: $a>d>c>b$.

2. Ker je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}=\frac{1-a+a}{a(1-a)}=\frac{1}{a(1-a)}$, moramo dokazati, da je $\frac{1}{a(1-a)}\geq 4$, oziroma $a(1-a)\leq\frac{1}{4}$. Ker pa je $a^2-a+\frac{1}{4}=(a-\frac{1}{2})^2\geq 0$, torej $\frac{1}{4}\geq -a^2+a$, neenakost velja.

3. Neenakost $a^4+b^4\geq a^3b+ab^3$ velja natanko tedaj, ko velja neenakost $a^4-a^3b+b^4-ab^3\geq 0$, oziroma $a^3(a-b)+b^3(b-a)\geq 0$. Ker pa je $a^3(a-b)+b^3(b-a)=(a-b)(a^3-b^3)=(a-b)(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)^2(a^2+ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2)=(a-b)^2((a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2)$, zadnji izraz pa je zmnožek 2 nenegativnih števil, je $a^3(a-b)+b^3(b-a)\geq 0$.

4. Ker je $2a^2+2ab+b^2\geq a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, za vsa realna števila pa je $(a+b)^2\geq 0$, je tudi $2a^2+2ab+b^2\geq 0$.

5. Neenakost $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ na obeh straneh pomnožimo z 2 in dobimo ekvivalentno neenakost $2a^2+2b^2+2c^2\geq 2ab+2bc+2ca$. Vse člene prenesemo na levo stran neenakost in dobimo $a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2\geq 0$. Ker pa je leva stran neenakosti $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0$, velja zadnja neenakost in zato tudi prva neenakost.

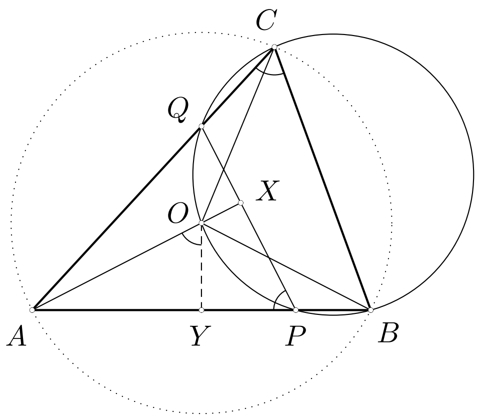
6. Neenakost pomnožimo z 2, nato pa vse člene neenakosti damo na levo stran in dobimo $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-2abc(a+b+c)\geq 0$. Ker pa je $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-2abc(a+b+c)=a^2b^2-2a^2bc+a^2c^2+a^2b^2-2ab^2c+b^2c^2+b^2c^2-2abc^2+a^2c^2=a^2(b-c)^2+b^2(a-c)^2+c^2(b-a)^2\geq 0$, velja tudi prvotna neenakost.

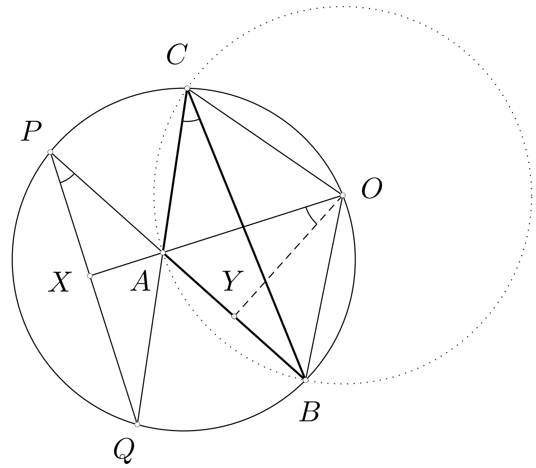
7. Harmonična sredina števil a in b je manjša ali enaka aritmetični sredini števil a in b, torej $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\frac{a+b}{2}$. Obe strani pomnožimo z $2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$ in dobimo prvotno neenakost.

8. Geometrijska sredina števil A in H je manjša ali enaka aritmetični sredini števil A in H. Torej $\sqrt{AH}\leq\frac{A+H}{2}$. Ker pa je $\sqrt{AH}=\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}=\sqrt{\frac{a+b}{2}\frac{2ab}{a+b}}=\sqrt{ab}=G$, je $G\leq\frac{A+H}{2}$, oziroma $2G\leq A+H$.

Usmerjeni koti

1. Označimo z Y pravokotno projekcijo točke O na AB. Tedaj je $\measuredangle AOY=\measuredangle ACB=\measuredangle QCB=\measuredangle QPB=\measuredangle QPA=\measuredangle XPA$. Ker velja $\measuredangle AOY=\measuredangle XPA=-\measuredangle APX$ in $\measuredangle YAO=\measuredangle PAX=-\measuredangle XAP$, sta si trikotnika AOY in APX podobna (in nasprotno usmerjena). Torej velja tudi $\measuredangle AXP=-\measuredangle AYO=\measuredangle OYA=\frac{\pi}{2}$ in zato $AX\perp XP$.





2. Različne točke A, B in C so kolinearne natanko tedaj, ko je $AB \parallel BC$. Slednje pa velja natanko tedaj, ko je $\measuredangle ABC = 0$.

3. Ker je v poljubnem trikotniku XYZ vsota notranjih kotov enaka iztegnjenemu kotu, velja

$$\measuredangle XYZ + \measuredangle YZX + \measuredangle ZXY \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

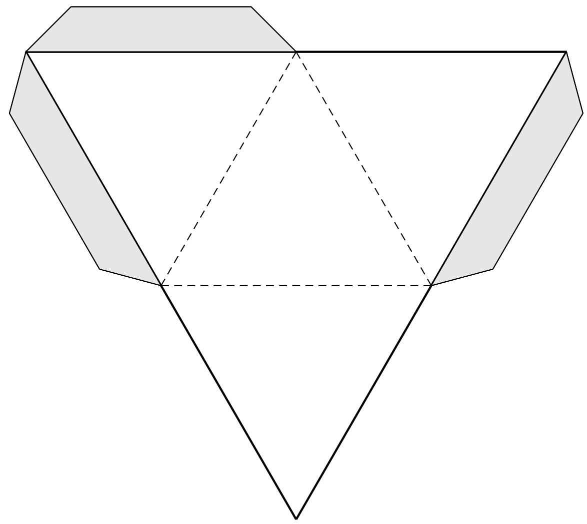
Sledi

$$\begin{aligned}
\measuredangle ABC + \measuredangle CDA &\equiv (\measuredangle BAC + \measuredangle ACB) + (\measuredangle DCA + \measuredangle CAD) = \\
&= (\measuredangle BAC + \measuredangle CAD) + (\measuredangle DCA + \measuredangle ACB) = \\
&= \measuredangle BAD + \measuredangle DCB \pmod{\pi}.
\end{aligned}$$

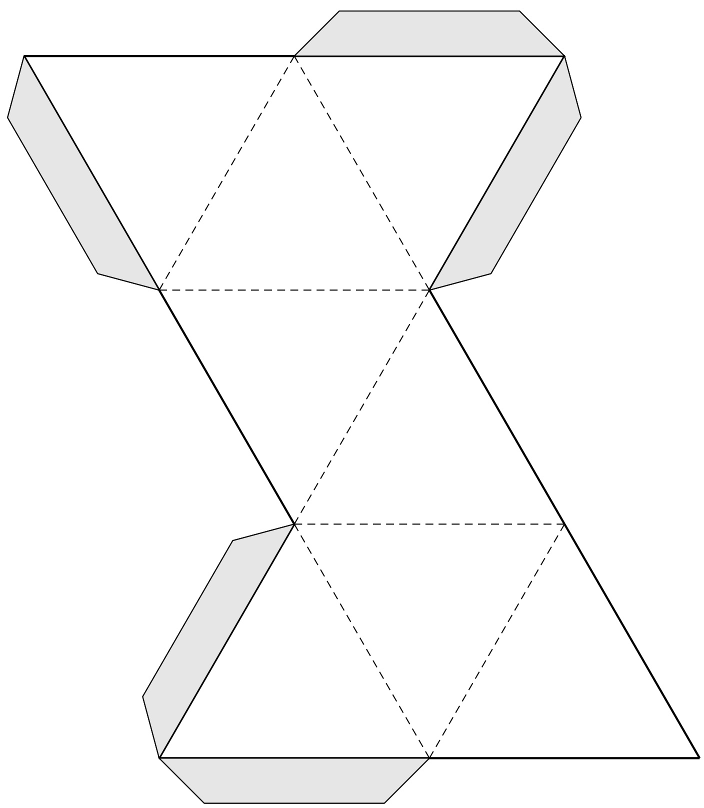
http://www.dmfa.si/Brihtnez/BrihtnezIndex.html

Brihtnež, Letnik 0, številka 4

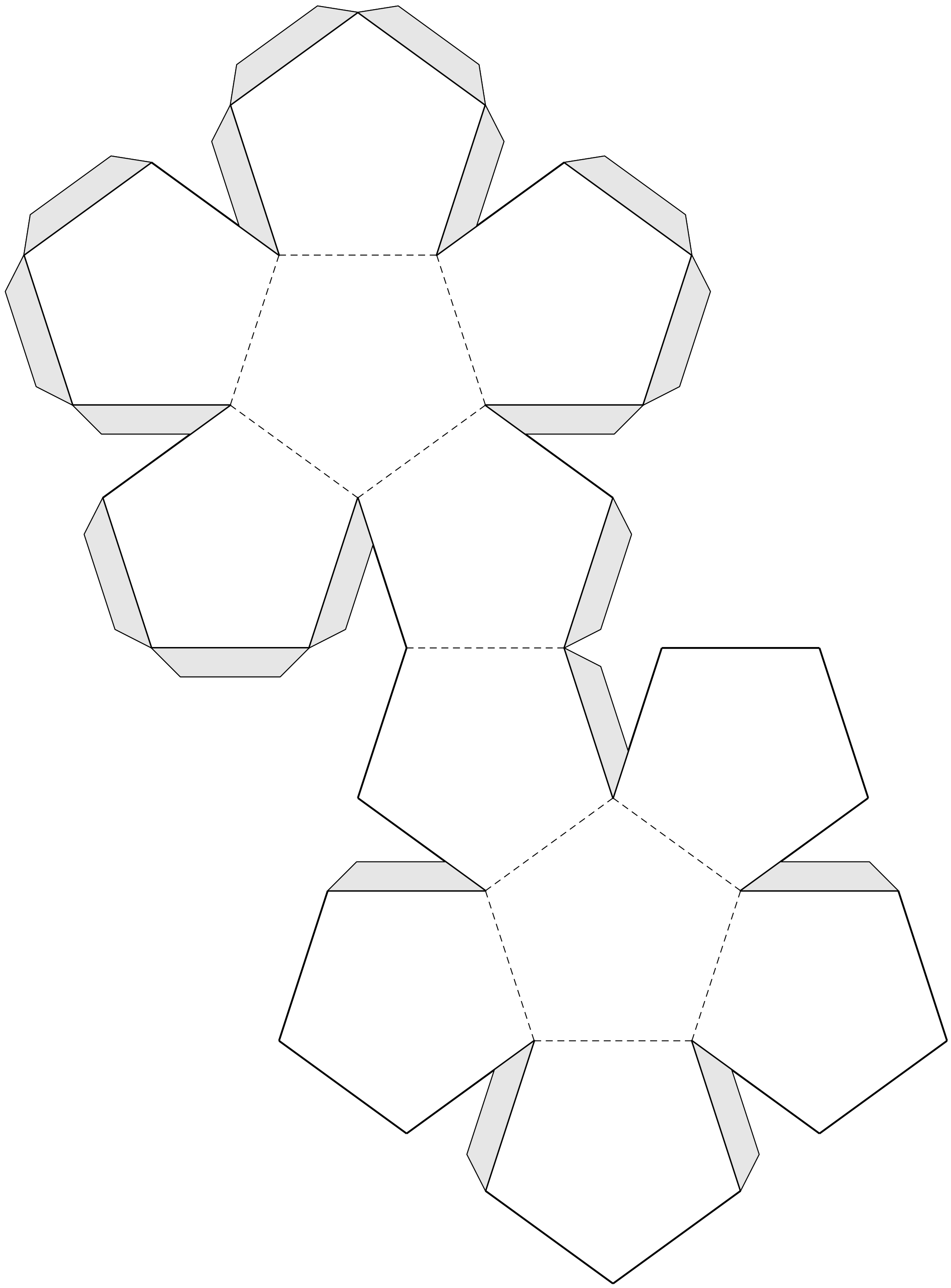
Januar 2003



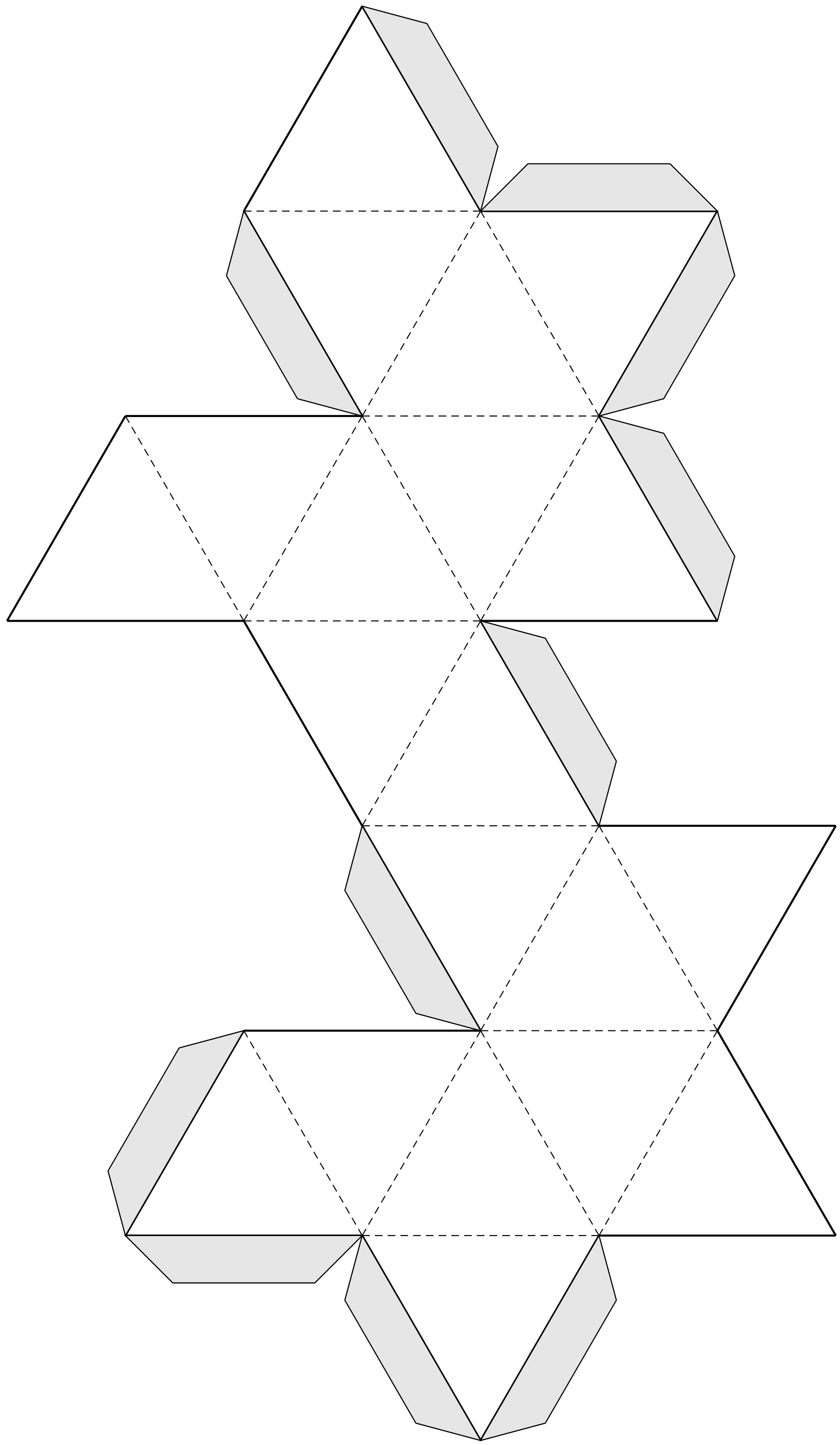
Slika 1: Mreža pravilnega tetraedra



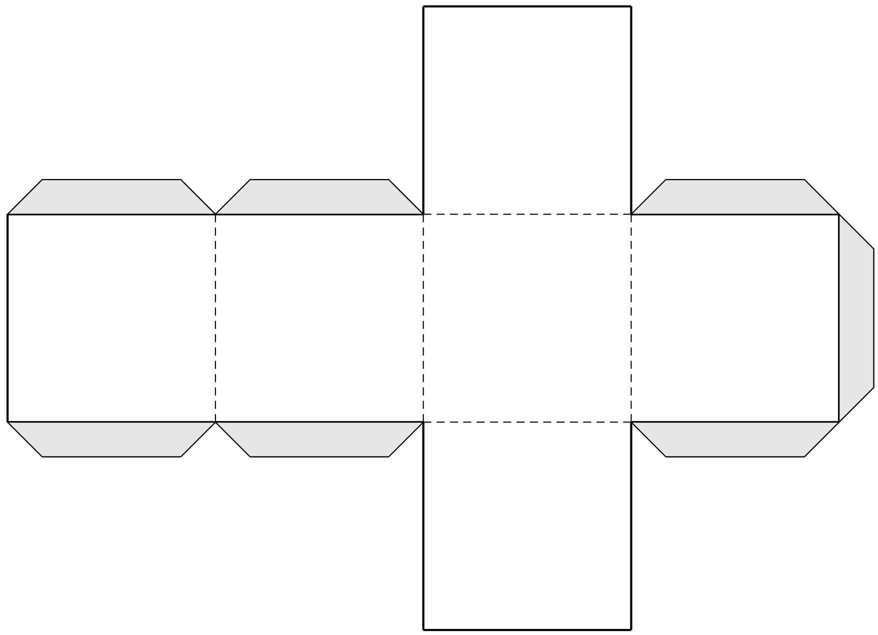
Slika 2: Mreža oktaedra



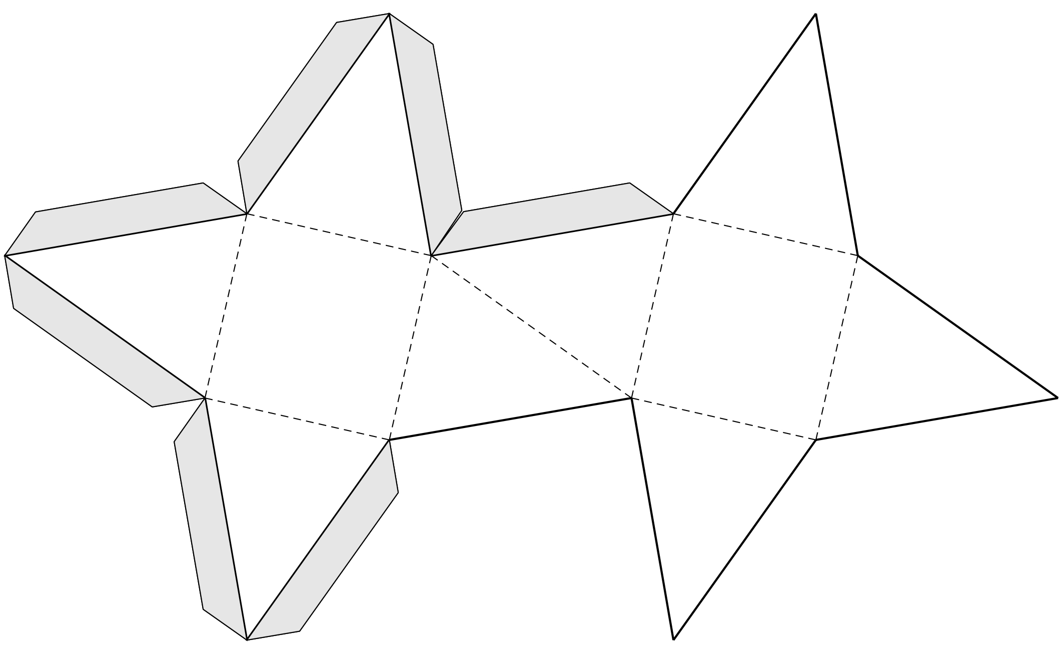
Slika 3: Mreža dodekaedra



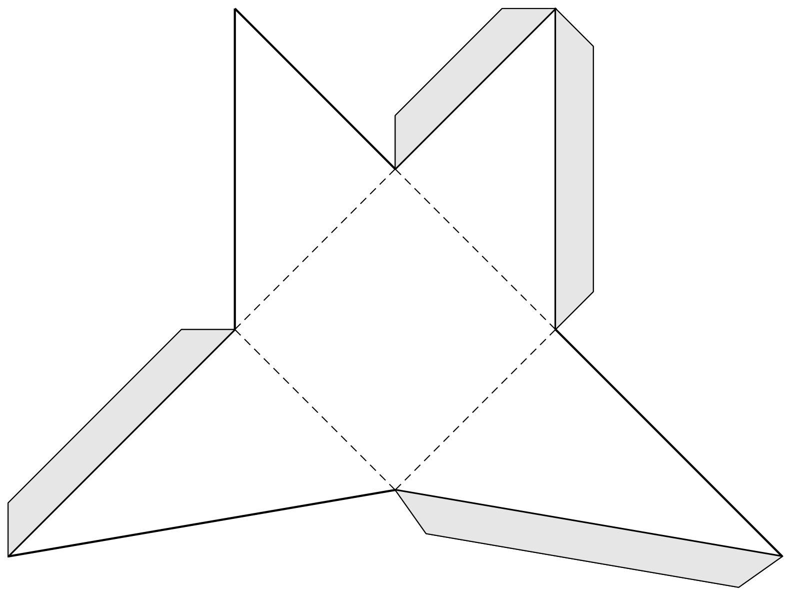
Slika 4: Mreža ikozaedra



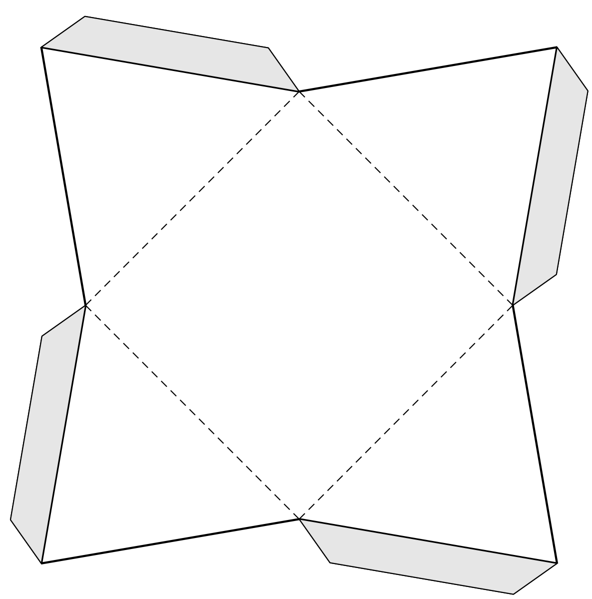
Slika 5: Mreža kocke



Slika 6: Mreža kvadratne antiprizme (naloga 11 na strani 6)



Slika 7: Mreža piramide (naloga 16 na strani 7)



Slika 8: Mreža piramide (naloga 17 na strani 7)